Numeri Complessi

Motivazione

L'introduzione dell'insieme R dei numeri reali può essere motivata dall'impossibilità di risolvere nell'insieme Q dei numeri razionali alcune semplici equazioni algebriche, ad esempio

$$x^2-2=0$$

Tuttavia non ogni equazione algebrica è risolubile in R; l'equazione

$$x^2+1=0$$

non ha radici reali.

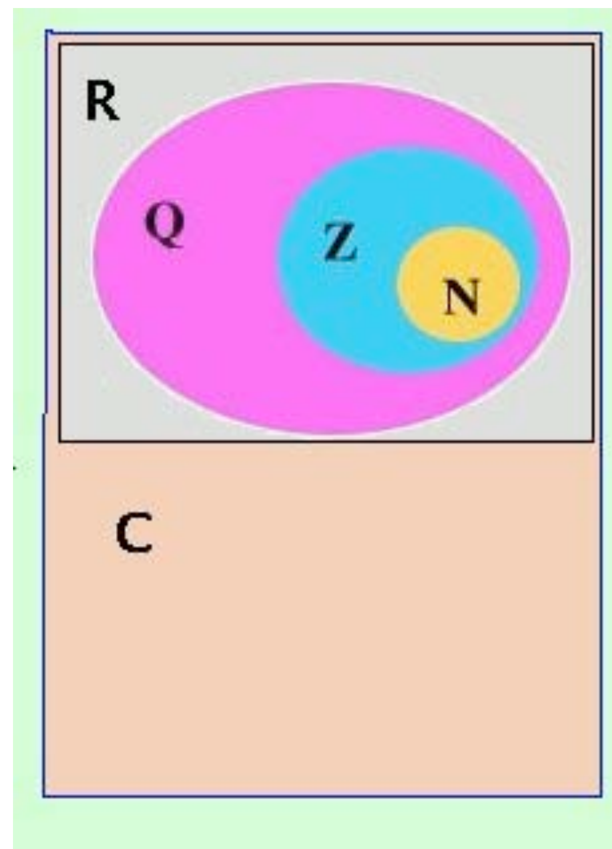
Possiamo definire un insieme contenente R in cui questa equazione abbia soluzione? Più precisamente: possiamo definire un insieme in cui ogni equazione algebrica di grado n ha esattamente n radici (contate con la loro molteplicità)?

Supponiamo che esista una soluzione dell'equazione $x^2+1=0$ e sia essa *i*; dunque

$$i^2 = -1$$

L'equazione $x^2+1=0$ avrebbe dunque le due soluzioni $\pm i$

Si noti bene che sia *i* che *-i* *non* possono appartenere alla retta reale.


R
Q
Z
N
C

Definizione

L'insieme C *dei numeri complessi è l'insieme dei punti* ($a; b$) *del piano* $\mathbb{R}^2$ *con le operazioni di somma e prodotto*

$$(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d)$$
$$(a; b) \cdot (c; d) = (ac - bd; ad + bc)$$

I numeri complessi sono formati da due parti, una parte reale ed una parte immaginaria, e sono rappresentati dalla seguente espressione:

$$z = x + i\, y$$

dove x e y sono numeri reali, mentre i è l'unità immaginaria.

$$i^2 = -1$$

Rappresentazione geometrica

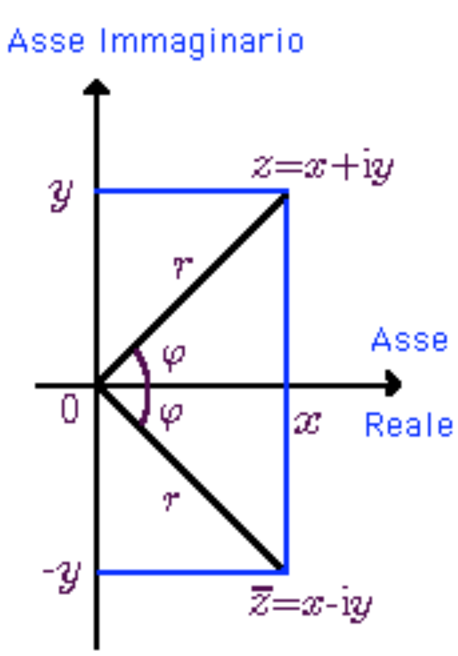
Un numero complesso può essere visto come un punto del piano cartesiano. Una rappresentazione di questo tipo si chiama diagramma di Argand. Nella figura si vede che

$$z = x + i\,y = r\,(cos\varphi + i\,sin\varphi)$$

Le formule inverse per x > 0 sono:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = arctan\,\frac{y}{x}$$

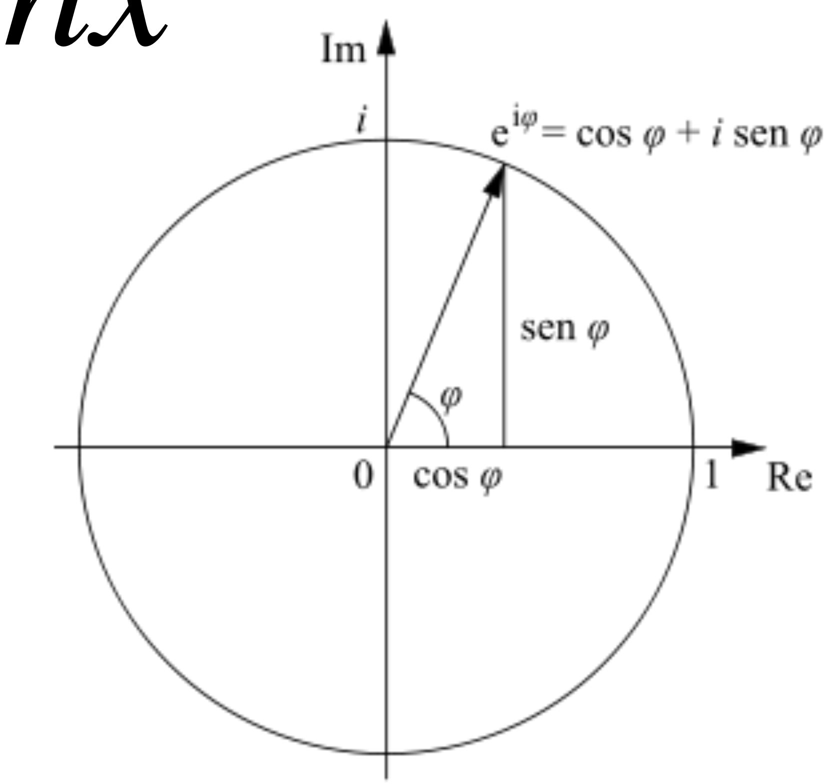


Formula di Eulero

La **formula di Eulero**, da Leonhard Euler, è una formula matematica nel campo dell'analisi complessa che mostra una profonda relazione fra le funzioni trigonometriche e la funzione esponenziale complessa.

La formula di Eulero afferma che, per ogni numero reale *x*,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$



dove

e è la base dei logaritmi naturali

i è l'unità immaginaria

sen e *cos* sono funzioni trigonometriche.

Questa formula può essere interpretata dicendo che la funzione e^{ix} traccia un cerchio unitario nel piano complesso con x che varia nell'insieme dei numeri reali. Qui x è l'angolo che un segmento che collega l'origine a un punto del cerchio unitario forma con l'asse reale positivo, misurato in senso antiorario e in radianti. La formula è valida solo se seno e coseno prendono i loro argomenti in radianti invece che in gradi.

La dimostrazione più diffusa è basata sull'espansione in serie di Taylor della funzione esponenziale e^z (dove z è un numero complesso).

La formula mostra una forte connessione fra l'analisi e la trigonometria. È usata per rappresentare i numeri complessi in coordinate polari e permettere la definizione del logaritmo per argomenti complessi. Usando le proprietà esponenziali

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b \quad \text{e} \quad (e^a)^b = e^{ab}$$

(che sono valide per tutti i numeri complessi a e b), si possono derivare facilmente da esse molte identità trigonometriche come pure la formula di de Moivre. La formula di Eulero permette anche di interpretare le funzioni seno e coseno come semplici varianti della funzione esponenziale:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Queste formule possono anche essere usate come definizione delle funzioni trigonometriche per argomenti complessi x. Le due equazioni riportate sopra possono essere derivate sommando o sottraendo le seguenti formule di Eulero:

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \qquad e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$$

Usando la formula di Eulero:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

quindi posso scrivere un generico numero complesso:

$$z = x + i\, y = r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi\,) = r\, e^{i\varphi}$$

il formalismo esponenziale per i numeri complessi ci permette di sfruttare le proprietà degli esponenziali per fare le operazioni con i numeri complessi

ad esempio:
rappresentando un numero complesso come

$$z = r\, e^{i\varphi}$$

è facile descrivere la **potenza** n-esima

$$z^n = r^n\, e^{ni\varphi}$$

Altre proprietà dell'esponenziale complesso:

$$|\, e^{z} \,| = e^{x} = r$$

$$\left(e^{z}\right)^{n} = e^{nz}$$

$$e^{0} = 1 \qquad e^{z} \neq 0$$

$$\frac{d}{dz} e^{z} = e^{z}$$

Il **prodotto** tra due numeri complessi invece:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1\, e^{i\varphi_1} \cdot r_2\, e^{i\varphi_2} = r_1\, r_2\, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

invece che in questa forma:

$$(a + ib)(c + id) = ac - bd + i(bc + ad)$$

In altre parole, nel prodotto di due numeri complessi, si sommano gli argomenti e si moltiplicano i moduli.

Il **rapporto** tra due numeri complessi invece:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\, e^{i\varphi_1}}{r_2\, e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

invece che in questa forma:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + i\, b_1}{a_2 + i\, b_2} = \frac{(a_1 + i\, b_1)}{(a_2 + i\, b_2)} \frac{(a_2 - i\, b_2)}{(a_2 - i\, b_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + (a_2 b_1 - a_1 b_2)\, i}{a_2^2 + b_2^2}$$